

Eine neue Modellierung für benachbarte Zahlen beim Lotto

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

Zusammenfassung: Die Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass von den sechs Zahlen einer Lottoziehung mindestens zwei benachbart sind, sowie einige Verallgemeinerungen dazu haben kürzlich Daume und Schmitz (2013) sehr ausführlich in SiS behandelt. Sie regten dabei an, zunächst kleinere Beispiele in einer Art Mini-Lotto zu untersuchen. Mein Beitrag greift diesen Vorschlag auf. Die beim Mini-Lotto gewonnenen Ergebnisse eröffnen dann in Verbindung mit einer etwas veränderten Modellierung des zugrunde liegenden Zufallsexperiments einen recht einfachen Weg zur Lösung des allgemeinen Problems ohne die von Daume und Schmitz genannten Schwierigkeiten.

1 Einleitung

Die oben erwähnten Schwierigkeiten traten auf, sobald man das Ereignis „mindestens zwei benachbarte Zahlen“ auf „genau zwei benachbarte Zahlen“ reduzierte bzw. zu „mindestens drei benachbarte Zahlen“ verallgemeinerte.

Im zweiten Abschnitt werden die Zufallsvariable und das Urnenmodell vorgestellt, mit denen ich das Pro-

blem im Unterricht ohne die genannten Schwierigkeiten bearbeitet habe.

Mithilfe des neuen Modells behandeln wir dann in Abschnitt 3 die verschiedenen Mini-Lottos mit nur fünf Kugeln.

Im vierten Abschnitt übertragen wir dieses Vorgehen auf das „große“ Lotto mit 49 Kugeln, wobei sich überraschend die Ergebnisse der Mini-Lottos als wesentlicher Baustein zur Lösung erweisen.

2 Eine neue Modellierung

Zunächst präzisieren wir die sprachlich ungenaue Bezeichnung *benachbart*, denn *Nachbar* kann ja sowohl „Vorgänger“ wie „Nachfolger“ bedeuten. Sinnvoller ist es anzugeben, ob eine gezogene Zahl unmittelbar auf eine andere Zahl dieser Ziehung folgt. Als Zufallsvariable Y wählen wir die Anzahl derartiger Nachfolger innerhalb einer Ziehung; diese kann beim Lotto «6 aus 49» offenbar die Werte $0 \leq Y \leq 5$ annehmen.

Die „Ersatzurne“ für «6 aus 49» von Daume und Schmitz mit 44 nummerierten Kugeln ergänzen wir

um fünf neue mit N_1 bis N_5 beschriftete Kugeln, die für möglicherweise in der Ziehung auftretende Nachfolger stehen (Abb. 1).

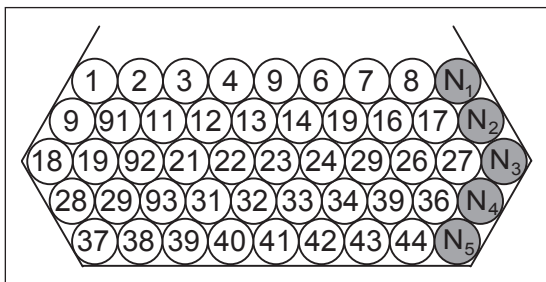


Abb. 1: „Ersatzurne“ für Ziehungen von «6 aus 49»

Im Unterschied zu der von Daume und Schmitz verwendeten Urne (ohne die grauen Kugeln), mit der man nur die *nachbarfreien* Ziehungen erfassen konnte, ist dies nun auch für alle Ziehungen mit zwei oder mehr benachbarten Zahlen möglich. Wie bei Daume und Schmitz ordnet man die weißen Kugeln aufsteigend und addiert zu der Zahl auf der i -ten Kugel $i - 1$, um die ihr entsprechende Lottozahl zu finden.

Wie eine Ziehung mit Mehrlingen im neuen Modell erfasst wird, erläutern wir an einem Beispiel: Aus der Urne in Abbildung 1 seien die weißen Kugeln 6, 21, 29 und 34 sowie die grauen Kugeln N_1 und N_4 gezogen worden. Abbildung 2 zeigt, wie man die dazu gehörige Ziehung von «6 aus 49» bestimmt.

⑥	②①	②⑨	③④	Ⓝ ₁	Ⓝ ₄
	N_1			N_4	
6	N_1	21	29	N_4	34
$\downarrow + 0$	\downarrow	$\downarrow + 2$	$\downarrow + 3$	\downarrow	$\downarrow + 5$
6	7	23	32	33	39

Abb. 2: Ermittlung der Gewinnzahlen aus einer Ziehung im neuen Modell

Zuerst platziert man die N_i entsprechend ihrem Index an der Stelle $i + 1$ (zweite Reihe in Abbildung 2), dann werden die weißen Kugeln in aufsteigender Folge in die Lücken gesetzt (dritte Reihe), und ihrer Position entsprechend vergrößert (unterste Reihe). Zuletzt werden die grauen Kugeln nacheinander jeweils durch den Nachfolger der links daneben stehenden Zahl ersetzt.

Umgekehrt entspricht jeder Lotto-Ziehung genau eine Ziehung aus der Ersatzurne in Abbildung 1. Als Beispiel betrachten wir die Gewinnzahlen 6, 22, 23, 24, 33 und 39 vom 9. Februar 2013. Hierunter sind die 23 und 24 Nachfolger im Sinne der obigen Definition, nämlich die Nachfolger der in aufsteigender Reihenfolge 2. und 3. Zahl; sie sind in Abbildung 3 grau gerastert:

6	22	23	24	33	39
6	22	N_2	N_3	33	39
$\downarrow - 0$	$\downarrow - 1$	\downarrow	\downarrow	$\downarrow - 4$	$\downarrow - 5$
⑥	②①	Ⓝ ₂	Ⓝ ₃	②⑨	③④

Abb. 3: Umwandlung ins neue Modell

Für diese stehen im neuen Modell die *grauen* Kugeln N_2 und N_3 . Welche *weißen* Kugeln aus der Ersatzurne den anderen vier Gewinnzahlen entsprechen, ergibt sich, indem man entsprechend ihrer Position 0, 1, ... 5 subtrahiert.

Obwohl in beiden Beispielen $Y = 2$ ist, treten verschiedene Typen von Mehrlingen auf, einmal zwei Zwillinge (6–7 und 32–33), das andere Mal ein Drilling (22–23–24).

3 Mini-Lotto «k aus 5»

In diesem Abschnitt untersuchen wir alle Fälle von Mini-Lottos mit fünf Kugeln auf mögliche Ziehungstypen mit Mehrlingen und die Anzahl von deren Kombinationsmöglichkeiten.

Lösung durch Auszählen

Der Fall $k = 1$ ist trivial; da es keine Mehrlinge geben kann. Bei den Fällen $k = 2$ und $k = 3$ nutzen wir die Tatsache, dass jedes Muster einer Ziehung «2 aus 5» zugleich mit einer Zweier-Teilmenge (graue Kugeln in der linken Spalte von Tabelle 1) auch eine Dreier-Teilmenge enthält (in der Urne verbliebene Kugeln, in Tabelle 1 weiß). Den Typ bezeichnen wir mit einem Zahlenpaar bzw. Tripel, das die Anzahl der isolierten Zahlen, der Zwillinge und (bei «3 aus 5») der Drillinge angibt.

Ziehungsmuster	Ziehungstyp	
	„2 aus 5“	„3 aus 5“
① ② ③ ④ ⑤	[0; 1]	[0; 0; 1]
① ② ③ ④ ⑤	[2; 0]	[1; 1; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[2; 0]	[1; 1; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[2; 0]	[0; 0; 1]
① ② ③ ④ ⑤	[0; 1]	[1; 1; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[2; 0]	[3; 0; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[2; 0]	[1; 1; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[0; 1]	[1; 1; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[2; 0]	[1; 1; 0]
① ② ③ ④ ⑤	[0; 1]	[0; 0; 1]

Tab. 1: Mehrlinge bei «2 aus 5» und «3 aus 5»

Bei den 10 Zweier-Teilmengen gibt es die Typen

- zwei isolierte Zahlen (6-mal [2; 0]),
- ein Zwilling (4-mal [0; 1]).

Bei den Dreier-Teilmengen gibt es drei Typen:

- drei isolierte Zahlen (1-mal),
- eine isolierte Zahl und ein Zwilling (6-mal),
- ein Drilling (3-mal).

Typen bei «4 aus 5» (Übungsaufgabe!):

- [0; 2; 0; 0] (1-mal),
- [1; 0; 1; 0] (2-mal),
- [0; 0; 0; 1] (2-mal).

Im Fall $k = 5$ ist nur ein Fünfling möglich.

Lösung mit Formeln

Ausgangspunkt einer theoretischen Untersuchung ist die Feststellung, dass es in einer Ziehung des allgemeinen Lottos « k aus n » nicht mehr als $k - 1$ Nachfolger geben kann.

In die Ersatzurne kommen daher $k - 1$ graue und $n - (k - 1)$ weiße Kugeln; Abbildung 4 zeigt dies für die Beispiele «2 aus 5» und «3 aus 5».

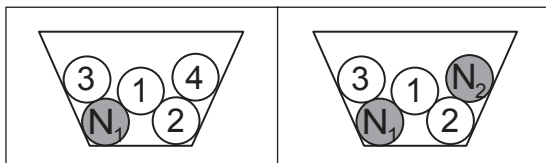


Abb. 4: Ersatzurnen für «2 aus 5» und «3 aus 5»

Für «2 aus 5» gibt es zwei Fälle: Man zieht die graue und eine weiße Kugel oder aber zwei weiße. Im ersten

Fall tritt ein Zwilling auf, und das ist auf $\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1} = 4$

Arten möglich; während es $\binom{1}{0} \cdot \binom{4}{2} = 6$ Möglich-

keiten gibt, zwei weiße Kugeln zu ziehen, was ein Muster mit zwei isolierten Zahlen liefert.

Bei der Version «3 aus 5» gibt es sogar drei Fälle:

- Zwei graue Kugeln und eine weiße kann man auf $\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1} = 3$ Arten ziehen (Typ [0; 0; 1]);
- eine graue und zwei weiße Kugeln zu entnehmen ist auf $\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} = 6$ Arten möglich (Typ [1; 1; 0]);
- schließlich ist eine Ziehung mit drei weißen Kugeln wegen $\binom{2}{0} \cdot \binom{3}{3} = 1$ nur auf eine Art möglich (Typ [3; 0; 0]).

Diese Ergebnisse stimmen mit den aus Tabelle 1 durch Abzählen gewonnenen exakt überein.

«4 aus 5»: Lösung mit Rekursion

Aus den bisherigen Fällen lassen sich folgende Regeln erkennen:

- (1) Zieht man alle grauen Kugeln ($Y = k - 1$), so entsteht ein k -ling (Ziehungstyp [0; ... 0; 1]).
- (2) Zieht man nur eine graue Kugel ($Y = 1$), dann tritt ein Zwilling auf (Typ [$k - 2; 1; 0; \dots 0$]).
- (3) Zieht man keine graue Kugel ($Y = 0$), dann gibt es nur isolierte Zahlen (Typ [$k; 0; \dots 0$]).
- (4) Bei $Y = j$ grauen Kugeln sind $\binom{k-1}{j} \cdot \binom{n-k+1}{k-j}$ Kombinationen möglich.

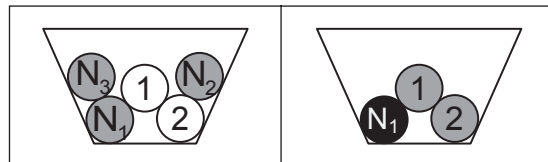


Abb. 5: Ersatzurne und Hilfsurne für «4 aus 5»

Wir wenden diese Regeln auf das Lotto «4 aus 5» mit der linken Urne aus Abbildung 5 an: Im Fall $j = 3$ erhält man gemäß Regel (1) einen Vierling mit – nach Regel 4 – zwei Kombinationsmöglichkeiten: $1-N_1-N_2-N_3$ und $2-N_1-N_2-N_3$, die den Ziehungen $1-2-3-4$ bzw. $2-3-4-5$ entsprechen. Die beiden Fälle $j = 1$ und $j = 0$ sind nicht möglich, da man dann 3 bzw. 4 weiße Kugeln ziehen müsste. Formal drückt sich das darin aus, dass $\binom{n-k+1}{k-j}$, also $\binom{2}{3}$ bzw. $\binom{2}{4}$, null wird.

Auf den Fall $j = 2$ lassen sich die obigen Regeln nicht anwenden, da j größer als 1, aber kleiner als $k - 1 = 3$ ist. Hier müssen beide weißen Kugeln gezogen werden, und je nachdem, welche zwei der drei grauen man zieht, entstehen unterschiedliche Muster (dieses Phänomen ist uns schon bei den Beispielen in Abschnitt 2 begegnet).

Hinsichtlich der grauen Kugeln liegt also dasselbe Problem vor wie mit der Ersatzurne zu Beginn (jetzt aber mit kleineren Zahlen): Wir haben $n^* = k - 1 = 3$ (graue) Kugeln, von denen $k^* = j = 2$ gezogen werden sollen; dabei gibt es $k^* - 1 = 1$, also nur einen möglichen Nachfolger. Diese Situation ist rechts in Abbildung 4 mit einer *Hilfsurne* veranschaulicht.

Den rekursiven Ansatz verdeutlichen auch die Farben und Bezeichnungen: Die grauen Kugeln in der Hilfsurne übernehmen die Rolle der weißen in der

Ersatzurne, sie werden daher (ohne „N“) von 1 bis $n^* - (k^* - 1) = 2$ durchnummeriert. Die Rolle als (einzig möglicher) Nachfolger hat die schwarze Kugel mit der Bezeichnung N_1 .

Auf die Hilfsurne können wir nun unsere Regeln wieder anwenden:

- Zieht man die schwarze Kugel ($Y^* = 1$) und eine der grauen, dann tritt nach Regel (2) ein (grauer) Zwilling auf. Dies ist nach Regel (4) auf zwei Arten möglich.
- Zieht man keine schwarze Kugel ($Y^* = 0$) und zwei graue, so tragen diese nach Regel (3) zwei isolierte Zahlen. Dies ist nach Regel (4) nur auf eine Art möglich.

Es bleibt noch zu klären, für welche Ziehungen aus der Ersatzurne bzw. der Lotto-Urne «4 aus 5» diese Fälle stehen. In Abbildung 6 ist der Weg zur Antwort dargestellt: In der mittleren Spalte stehen links die der Hilfsurnen-Ziehung entsprechenden grauen Kugeln in der Ersatzurne und rechts die vollständige aufsteigend angeordnete Ziehung, die ihrerseits gemäß Abbildung 2 in die zugehörige Lotto-Reihe umgeformt wird (rechte Spalte).

Hilfsurne	Ersatzurne	Lotto-Urne
① N ₁	N ₁ N ₂ → ① N ₁ N ₂ ②	1; 2; 3; 5
② N ₁	N ₂ N ₃ → ① ② N ₂ N ₃	1; 3; 4; 5
① ②	N ₁ N ₃ → ① N ₁ ② N ₃	1; 2; 4; 5

Abb. 6: Ziehungen mit 2 Nachfolgern bei «4 aus 5»

Aus den Untersuchungen dieses Abschnitts ergibt sich noch folgende allgemeine Regel:

- (5) Jedem k -ling aus Kugeln der Hilfsurne entspricht ein $(k + 1)$ -ling der Ausgangs-Urne (wobei eine isolierte Kugel als *Einling* gilt).

Zusammenfassung

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse dieses Abschnitts noch einmal zusammengefasst. In der dritten Spalte steht für jeden Ziehungstyp die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto « k aus 5» aufzutreten. Die durch Rekursion gewonnenen Ergebnisse sind grau unterlegt.

k	Typ	p	k	Typ	p	k	Typ	p
2	[2; 0]	0,6	3	[3; 0; 0]	0,1	4	[1; 0; 1; 0]	0,4
	[0; 1]	0,4		[1; 1; 0]	0,6		[0; 2; 0; 0]	0,2
				[0; 0; 1]	0,3	[0; 0; 0; 1]	0,4	

Tab. 2: Ziehungstypen und die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten beim Mini-Lotto « k aus 5»

4 Zahlenlotto «6 aus 49»

Wir wenden die beim Mini-Lotto entwickelte Strategie auf das „große“ Lotto «6 aus 49» an, wobei Y_0 die Zufallsvariable *Anzahl der Nachfolger* sei.

Ein Beispiel

Wir erläutern den Lösungsweg an folgendem Beispiel: Wie wahrscheinlich ist es, dass – wie bei der in Abschnitt 2 erwähnten Ziehung vom 9. Februar 2013 – der Typ [3; 0; 1; 0; 0; 0] mit 3 isolierten Zahlen und einem Drilling auftritt?

Wegen $Y_0 = 2$ sind aus der Ersatzurne (Abb. 1) zwei der 5 grauen Kugeln und vier der 44 weißen Kugeln zu entnehmen, was nach Regel (4) auf $\binom{44}{4} \cdot \binom{5}{2} = 1\,357\,510$ Arten geschehen kann. Da es insgesamt $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ mögliche Kombinationen gibt, ist $P(Y_0 = 2) \approx 0,09708$.

Nun gibt es jedoch, wie schon die Beispiele in Abschnitt 2 gezeigt haben, verschiedene Ziehungstypen mit $Y_0 = 2$, daher brauchen wir wieder eine Hilfsurne, die hier der Auswahl der beiden grauen Kugeln (aus den fünf vorhandenen) dient. Da es bei zwei zu ziehenden Kugeln höchstens einen Nachfolger gibt, muss die Hilfsurne vier graue und eine schwarze Kugel enthalten.

Dies ist aber – abgesehen von der Färbung – genau die Zusammenstellung, die wir in Abschnitt 3 für das Mini-Lotto «2 aus 5» benutzt haben und die nun hier im ersten Rekursionsschritt auftritt. Damit ein Drilling zustande kommt, muss man aus der Hilfsurne nach Regel (5) genau einen Zwilling ziehen. Aus Tabelle 2 entnimmt man, dass hierfür $p = 0,4$ gilt. Damit erhalten wir das Ergebnis $P([3; 0; 1; 0; 0; 0]) \approx 0,09708 \cdot 0,4 = 0,038832$.

Vollständige Lösung

Die Wahrscheinlichkeit der anderen 10 Ziehungstypen bestimmt man in gleicher Weise; zuerst wird $p_0 = P(Y_0 = j)$ berechnet (1. bis 3. Spalte in Tab. 3). Für $j \in \{0; 1; 5\}$ gibt es nach den Regeln (1) bis (3) nur je einen Typ t , daher ist p_0 bereits die Wahrscheinlichkeit dieses Typs.

Für die übrigen Werte von j ergeben sich die möglichen Typen mithilfe von Regel (5) aus Tabelle 2: Im Fall $j = 2$ führt ein Zwilling (Typ [0; 1]) aus der Hilfsurne mit «2 aus 5» zu einem Drilling aus der Lotto-Urne «6 aus 49» (Typ [3; 0; 1; 0; 0; 0]), und [2; 0] führt auf [2; 2; 0; 0; 0; 0].

Analog dazu werden im Fall $j=3$ aus den Typen $[3; 0; 0]$, $[1; 1; 0]$ und $[0; 0; 1]$ der Hilfsurne die Lotto-Typen $[0; 3; 0; 0; 0; 0]$, $[1; 1; 1; 0; 0; 0]$ und $[2; 0; 0; 1; 0; 0]$; ebenso entsprechen im Fall $j=4$ die Typen $[0; 0; 2; 0; 0; 0]$, $[0; 1; 0; 1; 0; 0]$ und $[1; 0; 0; 0; 1; 0]$ in Tabelle 3 den drei Typen $[0; 2; 0; 0]$, $[1; 0; 1; 0]$ und $[0; 0; 0; 1]$ beim Mini-Lotto «4 aus 5»,

Die Wahrscheinlichkeit eines dieser in der Tabelle 3 grau unterlegten 8 Typen t mit $j \in \{2; 3; 4\}$ erhält man, indem man p_0 noch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $p_1 = P(t|Y=j)$ multipliziert; diese entnimmt man aus Tabelle 2. Man beachte, dass in den dunkelgrau markierten Fällen bereits p_1 rekursiv bestimmt wurde (siehe Abschnitt 3).

j	$\binom{44}{6-j} \cdot \binom{5}{j}$	p_0	p_1	$p_0 \cdot p_1$	Typ t
0	7059052	0,50480			[6; 0; 0; 0; 0; 0]
1	5430040	0,38831			[4; 1; 0; 0; 0; 0]
2	1357510	0,09708	0,6	0,0582	[2; 2; 0; 0; 0; 0]
			0,4	0,0388	[3; 0; 1; 0; 0; 0]
3	132440	0,00947	0,1	$9,5 \cdot 10^{-4}$	[0; 3; 0; 0; 0; 0]
			0,6	0,0057	[1; 1; 1; 0; 0; 0]
			0,3	0,0028	[2; 0; 0; 1; 0; 0]
4	4730	$3,38 \cdot 10^{-4}$	0,2	$6,8 \cdot 10^{-5}$	[0; 0; 2; 0; 0; 0]
			0,4	$1,4 \cdot 10^{-4}$	[0; 1; 0; 1; 0; 0]
			0,4	$1,4 \cdot 10^{-4}$	[1; 0; 0; 0; 1; 0]
5	44	$3,15 \cdot 10^{-6}$			[0; 0; 0; 0; 0; 1]

Tab. 3: Wahrscheinlichkeiten der 11 Ziehungstypen beim Lotto «6 aus 49»

Vergleich mit empirischen Daten

Aus den Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 3 kann man nun berechnen, in wie vielen der insgesamt 104 Ziehungen eines Jahres (bzw. der je 52 am Mittwoch oder Samstag) jeder Typ zu erwarten ist.

j	0	1	2		≥ 3
			2 Zw.	1 Dr.	
erwartet	52,5	40,4	6,1	4,0	1,0
2012	59	31	8	5	1
erwartet	26,2	20,2	3,0	2,0	0,5
Mittwoch	29	18	3	2	0
Samstag	30	13	5	3	1

Tab. 4: Erwartete und eingetretene Häufigkeiten der Ziehungstypen im Jahr 2012

In Tabelle 4 sind diese theoretischen Werte den im Jahr 2012 aufgetretenen absoluten Häufigkeiten ge-

genübertgestellt (Lotto-Statistik 2013). Alle Typen mit einem Erwartungswert unter 1 sind dabei zu einer Klasse mit $j \geq 3$ zusammengefasst.

Wie ein χ^2 -Test zeigt, sind die Abweichungen der aufgetretenen Häufigkeiten von den erwarteten nicht einmal auf dem 10 %-Niveau signifikant.

Bei den selteneren Mehrlingen fällt auf, dass bis Ende Februar 2013 in 5143 Ziehungen 24 Vierlinge statt zu erwartender 14,6 vorkamen. Dagegen sind 1 Fünfling und kein Sechsling bei erwarteten 0,7 bzw. 0,016 unauffällig (Lotto-Statistik 2013).

5 Schlussbemerkungen

Um das Mehrlingsproblem zu modellieren, haben wir die *Nachfolger* (und nicht die *Nachbarn*) innerhalb des n -tupels einer Lottoziehung betrachtet; so konnten wir aufwändige Fallunterscheidungen vermeiden, wie sie z. B. Daume und Schmitz (2013; S. 12) in Abschnitt 3.3 ihrer Arbeit durchführen mussten.

Ein Vorteil des erweiterten Modells der Ersatzurne ist, dass dabei die Ziehung von 6 aus 49 erhalten bleibt und nicht eine Auswahl von 6 aus 44 zu treffen ist. Die Einführung der Ersatzurne mit Kugeln in zwei unterschiedlichen Farben wird erleichtert, wenn man zuvor auf analoge Weise die Wahrscheinlichkeiten der Gewinnklassen behandelt hat (dort mit $43 + 6$ Kugeln).

Durch das Mini-Lotto in Abschnitt 3 werden in einem überschaubaren Rahmen die wesentlichen Ideen (und Teilergebnisse!) zur Lösung des eigentlichen Problems bereitgestellt. Methodisch ist von Vorteil, dass die Schüler sehen können, ob ihre zunächst durch Abzählen erzielten Ergebnisse zu den später theoretisch gewonnenen Formeln passen. Auch tritt beim Mini-Lotto im Fall «4 aus 5» schon eine Rekursion (Hilfsurne) auf, so dass an dieser Stelle bereits der in Abschnitt 4 folgende Rückgriff auf die mit dem Mini-Lotto erzielten Ergebnisse vorbereitet wird.

Literatur

Daume, P.; Schmitz, M. (2013): Zwillinge und andere Mehrlinge beim Lotto. In: *Stochastik in der Schule* 33(1), S. 8–15.
 Lotto-Statistik (2013): www.dielottozahlende.net/lotto/6aus49/statistiken.html (Zugriff: 1.3.2013)

Anschrift des Verfassers

Gerd Riehl
 Obere Mark 6
 30890 Barsinghausen
 Gerd.Riehl@t-online.de